



OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] = [2x]$$

Gazeta Matematică, Supliment 11/2022

**Soluție și barem**

Avem:  $[x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$  .....1 punct

Rămâne de rezolvat ecuația:  $\left[ x + \frac{1}{3} \right] = \left[ x + \frac{1}{2} \right]$  .....1 punct

Membrul stâng și membrul drept sunt funcții periodice de perioadă 1 deci este suficient să rezolvăm ecuația pe intervalul  $[0,1]$  .....1 punct

Mulțimea soluțiilor din intervalul  $[0,1]$  este  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right) \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right]$  .....2 puncte

Mulțimea soluțiilor este  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left[ k, k + \frac{1}{2} \right) \cup \left[ k + \frac{2}{3}, k + 1 \right] \right)$  .....1 punct



OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie  $a, b$  două numere reale. Să se arate că există un număr irațional  $x$ , astfel încât numerele  $a + x$  și  $b + x$  să fie ambele iraționale.

**Soluție și barem**

Să presupunem contrariul. Atunci, pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , cel puțin unul dintre numerele  $a + x, b + x$  este rațional.....2 puncte

Considerăm atunci următoarele perechi:

$$\begin{array}{ll} a + x & b + x \\ a + 2x & b + 2x \\ a + 3x & b + 3x \end{array}$$

.....3 puncte

În fiecare linie, cel puțin unul dintre cele două numere este rațional. Rezultă că într-una din cele două coloane, din cele 3 numere, măcar două sunt raționale, deci diferența lor e, de asemenea, număr rațional. Dar diferența este fie  $x$ , fie  $2x$  și acestea sunt iraționale, contradicție.....2 puncte



OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a IX-a

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $x + y + z = 1$ . Să se demonstreze că:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1.$$

**Soluție și barem**

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{1}{2} \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \right) \geq \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = y$$

.....4 puncte  
Scriind și inegalitățile analoage și însumând, obținem

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z = 1.$$

.....3 puncte  
**Soluție alternativă**

Eliminând numitorii, inegalitatea se scrie echivalent

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq xyz$$

Folosind însă binecunoscuta inegalitate

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

avem

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq xy^2z + xyz^2 + x^2yz = xyz(x + y + z) = xyz$$

## OLIMPIDA DE MATEMATICĂ

Etapă locală 18.02.2023

Județul Buzău

CLASA a IX-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

- a) Să se arate că dacă  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt doi vectori diferiți, de aceeași lungime atunci  $\forall \alpha \in (0, \infty)$  vectorii  $\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2$  și  $\vec{v}_2 + \alpha \vec{v}_1$  au aceeași lungime.
- b) Să se arate că dacă  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt doi vectori diferiți și dacă există  $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  astfel încât vectorii  $\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2$  și  $\vec{v}_2 + \alpha \vec{v}_1$  au aceeași lungime atunci  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt doi vectori de aceeași lungime.

**Soluție și barem**

a) Fie  $\vec{OA}$  și  $\vec{OB}$  cei doi vectori. Considerăm punctele M și N pe segmentul [AB] astfel încât  $\frac{MA}{MB} = \alpha$  și  $\frac{NB}{NA} = \alpha$  ..... 1 punct

Avem  $\vec{OM} = \frac{\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2}{1 + \alpha}$  și  $\vec{ON} = \frac{\vec{v}_2 + \alpha \vec{v}_1}{1 + \alpha}$  ..... 1 punct

Segmentele MA și NB au aceeași lungime, triunghiul OAB este isoscel, triunghiurile OAM și OBN sunt congruente, rezultă ca vectorii  $\vec{OM}$  și  $\vec{ON}$  au aceeași lungime ..... 1 punct

Rezultă că vectorii  $\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2$  și  $\vec{v}_2 + \alpha \vec{v}_1$  au aceeași lungime ..... 1 punct

b) Fie  $\vec{OA}$  și  $\vec{OB}$  cei doi vectori. Considerăm punctele M și N pe segmentul [AB] astfel încât  $\frac{MA}{MB} = \alpha$  și  $\frac{NB}{NA} = \alpha$  ..... 1 punct

Avem  $\vec{OM} = \frac{\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2}{1 + \alpha}$  și  $\vec{ON} = \frac{\vec{v}_2 + \alpha \vec{v}_1}{1 + \alpha}$  ..... 1 punct

Segmentele MA și NB au aceeași lungime, segmentele OM și ON au aceeași lungime, triunghiul OMN este isoscel, triunghiurile OAM și OBN sunt congruente, rezultă ca vectorii  $\vec{OA}$  și  $\vec{OB}$  au aceeași lungime ..... 1 punct





**OLIMPIDA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 18.02.2023**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a X-a**

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$\frac{1}{12^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{20^x} = \frac{1}{5^{\sqrt{x}}}$$

Gazeta Matematică 11/2022

**Soluție și barem**

Condiție de existență  $x \geq 0$ . Se observă că  $x = 1$  este soluție.....1 punct

Ecuația se scrie  $\frac{3^x + 4^x + 5^x}{5^x \cdot 12^x} = \frac{1}{5^{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{12}\right)^x + \left(\frac{4}{12}\right)^x + \left(\frac{5}{12}\right)^x = 5^{x-\sqrt{x}}$

.....1 punct

Dacă  $x > 1$  atunci  $\left(\frac{3}{12}\right)^x < \frac{3}{12}, \left(\frac{4}{12}\right)^x < \frac{4}{12}, \left(\frac{5}{12}\right)^x < \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{12}\right)^x + \left(\frac{4}{12}\right)^x + \left(\frac{5}{12}\right)^x < \frac{3+4+5}{12} = 1$  .....1 punct

și  $x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 5^{x-\sqrt{x}} > 5^0 = 1$ .....1 punct

Dacă  $x < 1$  atunci  $\left(\frac{3}{12}\right)^x > \frac{3}{12}, \left(\frac{4}{12}\right)^x > \frac{4}{12}, \left(\frac{5}{12}\right)^x > \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{12}\right)^x + \left(\frac{4}{12}\right)^x + \left(\frac{5}{12}\right)^x > \frac{3+4+5}{12} = 1$  .....1 punct

și  $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow 5^{x-\sqrt{x}} < 5^0 = 1$ .....1 punct

Deci  $x=1$  este soluție unică .....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU

OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie funcțiile  $f, g: R \rightarrow R$  care verifică relația

$$f(f(x)) + g(f(y)) = x - f(y), \text{ pentru orice } x, y \in R.$$

- a) Arătați că  $f$  este inversabilă.  
b) Determinați  $f$ , știind că  $g = f^{-1}$ .

Gazeta Matematică, Supliment, 2/2022

**Soluție și barem**

- a) Arătăm că  $f$  este injectivă. Fie  $x_1, x_2 \in R$  astfel încât  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow f(f(x_1)) + g(f(y)) = f(f(x_2)) + g(f(y)) \Rightarrow$   
.....1 punct  
 $\Rightarrow x_1 - f(y) = x_2 - f(y) \Rightarrow x_1 = x_2$ , deci  $f$  este injectivă.....1 punct  
Arătăm că  $f$  este surjectivă. Fie  $y \in R$ . Căutăm  $x \in R$  astfel încât  $f(x) = y$   
Avem  $f(y) + g(f(y)) = x - f(y) \Rightarrow x = 2f(y) + g(f(y))$ , deci  $f$  este  
surjectivă.....1 punct  
b) În relația din enunț punem  $y \leftarrow x \Rightarrow f(f(x)) + g(f(x)) = x - f(x)$   
Cum  $g = f^{-1}$  rezultă  $g(f(x)) = x$ .....1 punct  
Rezultă  $f(f(x)) = -f(x), \forall x \in R$ .....1 punct  
Fie  $t \in R$ . Deoarece  $f$  este bijectivă  $\exists x \in R$  astfel încât  
 $f(x) = t$ .....1 punct  
Din  $f(f(x)) = -f(x), \forall x \in R$  rezultă  $f(t) = -t, \forall t \in R$ .....1 punct



OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$  cu proprietatea  $|a| = |b| = |c| = |a + b + c|$ .  
Să se arate că  $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$ .

**Soluție și barem**

Soluție.

Fie  $d = -a - b - c$ . Atunci

$$|a| = |b| = |c| = |d|$$

.....3puncte

Geometric, avem patru vectori de același modul, cu suma zero. Adunând vectorii cu regula poligonului, obținem un romb, deci sunt doi câte doi vectori opuși.....3puncte

Prin urmare, două dintre numerele  $a, b, c$  au suma zero.....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU

OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapă locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a X-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

**Soluție și barem**

Avem  $\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .....1 punct

$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-2, 2]$ .....1 punct

$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ .....1 punct

Egalitate când  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$  sau când  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$  .....1 punct

Ecuația  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$  nu are soluții în  $x \in [0, 2\pi)$

deoarece  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$  când  $x = \frac{7\pi}{4}$  iar  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} = -2$ .....1 punct

Ecuația  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$  are, în  $[0, 2\pi)$  soluția  $x = \frac{3\pi}{4}$ ..1 punct

Mulțimea soluțiilor ecuației din enunț este  $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ .....1 punct





INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU

OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a XI-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Fie  $A \in M_n(C)$  o matrice astfel încât toți minorii de ordinul  $n - 1$  sunt egali între ei. Să se arate că  $\det A = 0$ .

**Soluție și barem**

Fie  $d$  valoarea comună a minorilor de ordin  $n - 1$ . Atunci

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -d & d & \dots \\ -d & d & -d & \dots \\ d & -d & d & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

.....3 puncte  
Adunând primele două linii, obținem ușor că  $\det(A^*) = 0$ .....2 puncte  
Dar  $A \cdot A^* = (\det A)I_n$  de unde  $\det A = 0$ .....2 puncte



**OLIMPIDA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 18.02.2023**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a XI-a**

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Să se determine  $k \in \mathbb{R}$  astfel încât limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$  să existe, să fie finită și nenulă.

**Soluție și barem**

$$\begin{aligned}
 \text{Avem } \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\
 &= \frac{-2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}
 \end{aligned}$$

.....4 puncte

Se obține imediat că  $k = \frac{3}{2}$ .....3 puncte



**OLIMPIDA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 18.02.2023**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a XI-a**

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}$ , pentru orice  $n \in N^*$ .

a) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

Supliment, Gazeta Matematică 11/2022

**Soluție și barem**

a) Avem că  $a_n \geq 0$  pentru orice  $n \in N^*$ ,  $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n^2 + a_n} - a_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n} + a_n} > 0$ ,  $\forall n \in N^*$  deci șirul este strict crescător.....1 punct

Rezultă că șirul are limită în  $\bar{R}$ .....1 punct

Presupunem că limita este finită  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in R$ . Trecând la limită în relația de

recurență se obține  $l = \sqrt{l^2 + l} \Leftrightarrow l = 0$ .....1 punct

Fals deoarece un șir strict crescător cu  $a_1 = 1$  nu poate avea limita 0.

Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .....1 punct

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1 - n}$  (Cesaro-Stolz).....1 punct

$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n^2 + a_n} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n} + a_n} =$ .....1 punct

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a_n}} + 1} = \frac{1}{2}$ .....1 punct



**OLIMPIDA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 18.02.2023**  
**Județul Buzău**  
**CLASA a XI-a**

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Dacă  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  este o funcție monotonă cu proprietatea că  $(f \circ f)(x) = \ln x, \forall x \in (0, \infty)$ , arătați că există  $x_0 \in (0, \infty)$  astfel încât  $f(x_0) < 1$ .

E:24446 Gazeta Matematică 1/2001

**Soluție și barem**

Presupunem că  $\forall x \in (0, \infty)$  avem  $f(x) \geq 1$  .....1 punct

Dacă  $f$  este (strict) crescătoare, rezultă  $f(f(x)) \geq f(1)$ .....1 punct

$\Rightarrow \ln x \geq f(1), \forall x \in (0, \infty)$  .....1 punct

Fals deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ .....1 punct

a) Dacă  $f$  este (strict) descrescătoare:

Rezultă  $f(f(x)) \leq f(1) \Rightarrow \ln x \leq f(1), \forall x \in (0, \infty)$  fals.....1 punct

Fals deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ .....1 punct

Concluzia.....1 punct





OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a XII-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Pe mulțimea  $G$  cu cel puțin două elemente se consideră două legi de compoziție distincte notate cu  $*$  și  $\circ$ , cu proprietatea că  $(G, *)$  și  $(G, \circ)$  sunt grupuri. Arătați că niciuna din legi nu este distributivă față de cealaltă.

Supliment, Gazeta matematică 11/2022

**Soluție și barem**

Fie  $e$  elementul neutru pentru legea  $*$  și  $f$  elementul neutru pentru legea  $\circ$ . .....1 punct  
Să presupunem că  $*$  este distributivă față de  $\circ$ . .....1 punct  
Rezultă că:  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ ,  $\forall x, y, z \in G$ .....1 punct  
Punem  $y \leftarrow f$  și  $z \leftarrow f$  și avem  $x * (f \circ f) = (x * f) \circ (x * f)$ ,  $\forall x \in G$ ..1 punct  
 $x * f = (x * f) \circ (x * f)$ ,  $\forall x \in G$  și prin simplificare  $x * f = f$ ,  $\forall x \in G$ .....1 punct  
Rezultă  $x = e$ ,  $\forall x \in G$ , fals.....1 punct  
Analog se arată că  $\circ$  este distributivă față de  $*$  .....1 punct



OLIMPIDA DE MATEMATICĂ  
Etapa locală 18.02.2023  
Județul Buzău  
CLASA a XII-a

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H = \{x^2 | x \in G\}$ . Să se arate că dacă  $G$  este comutativ, atunci  $H$  este subgrup al lui  $G$ . Reciproca este adevărată?

**Soluție și barem**

Fie  $x, y \in H$ . Atunci există  $a, b \in G$  astfel încât  $x = a^2, y = b^2$ ....1 punct

Rezultă  $xy = a^2b^2 = aabb = abab = (ab)^2 \in H$ .....1 punct

Fie  $x \in H$ . Atunci există  $a \in G$  astfel încât  $x = a^2$ .....1 punct

$x^{-1} = (a^2)^{-1} = (a^{-1})^2 \in H$ .....1 punct

Deci  $H$  este subgrup.

Reciproca nu este adevărată. Fie  $S_3$  grupul neabelian al permutărilor de ordinul 3.....1 punct

și fie  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ..... 1 punct

Se verifică că  $H$  este subgrup,  $H = \{x^2 | x \in S_3\}$  dar  $S_3$  nu este comutativ.

.....1 punct

Etapa locală 18.02.2023

Județul Buzău

CLASA a XII-a

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c > 0$  și  $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$  astfel încât  $a + b = \frac{\pi}{2}$ . Calculați:

$$\int_a^b \frac{c + a \sin^n x + b \cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)} dx.$$

Gazeta matematică 11/2022

**Soluție și barem**

$$\text{Fie } I = \int_a^b \frac{c + a \sin^n x + b \cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)} dx = \int_a^b \frac{c + a \cos^n(\frac{\pi}{2} - x) + b \sin^n(\frac{\pi}{2} - x)}{4c + \pi(\cos^n(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^n(\frac{\pi}{2} - x))} dx \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Facem schimbarea de variabilă  $\frac{\pi}{2} - x = t$ ,  $dx = -dt \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$I = - \int_b^a \frac{c + a \cos^n t + b \sin^n t}{4c + \pi(\cos^n t + \sin^n t)} dx \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$I = \int_a^b \frac{c + a \cos^n t + b \sin^n t}{4c + \pi(\cos^n t + \sin^n t)} dx \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$2I = \int_a^b \frac{2c + (a+b)(\cos^n t + \sin^n t)}{4c + \pi(\cos^n t + \sin^n t)} dx \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$2I = \int_a^b \frac{2c + \frac{\pi}{2}(\cos^n t + \sin^n t)}{4c + \pi(\cos^n t + \sin^n t)} dx = \int_a^b \frac{1}{2} dx = \frac{b-a}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$I = \frac{b-a}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



## OLIMPIDA DE MATEMATICĂ

Etapă locală 18.02.2023

Județul Buzău

CLASA a XII-a

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $c \in (a, b)$ . Să se arate că dacă  $f$  admite primitive pe  $[a, c]$  și pe  $[c, b]$  atunci  $f$  admite primitive pe  $[a, b]$ .

**Soluție și barem**

Fie  $G: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$  pe  $[a, c]$  și  $H: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$  pe  $[c, b]$ ..... 1 punct

Definim funcția  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} G(x) + C_1, & x \in [a, c) \\ C, & x = c \\ H(x) + C_2, & x \in (c, b] \end{cases}$ .

.....1 punct  
Vom determina  $C_1, C, C_2$  astfel încât  $F$  să fie primitivă a lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

Din continuitatea în  $c$  a funcției  $F$  rezultă  $G(c) + C_1 = C = H(c) + C_2$ ,  $C_1 = C - G(c)$ ,  $C_2 = C - H(c)$ . .....1 punct

Deci  $F$  are forma  $F(x) = \begin{cases} G(x) - G(c) + C, & x \in [a, c) \\ C, & x = c \\ H(x) - H(c) + C, & x \in (c, b] \end{cases}$

.....1 punct  
 $F'_s(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{G(x) - G(c)}{x - c} = G'(c) = f(c)$ .....1 punct

$F'_d(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{H(x) - H(c)}{x - c} = H'(c) = f(c)$ .....1 punct

Prin urmare  $F$  este derivabilă în  $c$  și  $F'(c) = f(c)$ .

Pentru  $\forall x \in [a, c)$ ,  $F'(x) = (G(x) - G(c) + C)' = G'(x) = f(x)$

Pentru  $\forall x \in (c, b]$ ,  $F'(x) = (H(x) - H(c) + C)' = H'(x) = f(x)$

.....1 punct